

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
[+加关注](#)

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

[马上参与](#)

搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

单变量微积分笔记22——三角替换3（反向替换和配方）

反向替换

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = ?$$

若想求解，就必须去掉根号，但是现在发现没法用以往的知识求解了。

现在尝试求助于三角函数。在上篇文章中，我们提到：

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

这正好吻合根号下的表达式。现在令 $x = \tan\theta$ ，则：

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{d\tan\theta}{\tan^2\theta\sqrt{\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan^2\theta\sec\theta} = \int \frac{\sec\theta d\theta}{\tan^2\theta}$$

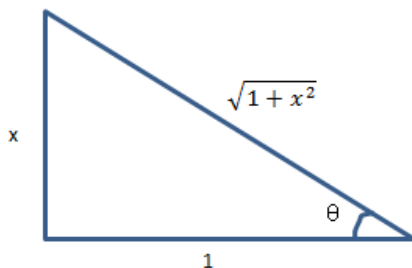
在三角函数中，只有sin和cos是比较友好的，其它都是变态。所以除非一眼能看出如何简化，否则应该把所有项都写成sin和cos的形式。

$$\int \frac{\sec\theta d\theta}{\tan^2\theta} = \int \frac{1/\cos\theta}{\sin^2\theta/\cos^2\theta} d\theta = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sin^2\theta}$$

已经变成熟悉的三角函数积分了。

$$\int \frac{\cos\theta d\theta}{\sin^2\theta} = \int \frac{d\sin\theta}{\sin^2\theta} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\sin\theta} + C = -\csc\theta + C$$

现在的问题是如何将 θ 转换为 x 。这需要求助于三角函数的几何意义，实际上已经使用过多次，如下图所示：



由上图可知： $\csc\theta = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ ，最终，经过反向替换：

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\csc\theta + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

三角替换的基本套路

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

被积函数	三角替换	替换结果
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ \text{or} \\ x = a\sin\theta \end{cases}$	$\begin{cases} a\cos\theta \\ \text{or} \\ a\sin\theta \end{cases}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan\theta$	$a\sec\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta$	$a\tan\theta$

配方

很多时候，根号下的表达式并不是上面表格中的标准套路，这就需要使用配方法将其凑成标准套路。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x}} = ?$$

如果根号下是 $x^2 + 4$ 就好办了。我们的目标是将其变成标准套路中的一种，然后使用三角替换将根号去掉。

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4 = (x + 2)^2 - 2^2$$

$$u = x + 2, \quad a = 2$$

$$u^2 - a^2 = (x + 2)^2 - 2^2$$

现在，结果符合标准套路了

$$u = a\sec\theta = 2\sec\theta$$

$$u^2 - a^2 \xrightarrow{\text{替换结果}} a^2\tan^2\theta = 2\tan^2\theta$$

$$du = 2\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x}} &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 4}} \\ &= \int \frac{2\sec\theta\tan\theta d\theta}{2\tan\theta} \\ &= \int \sec\theta d\theta \\ &= \ln(\sec\theta + \tan\theta) + C \end{aligned}$$

最后需要利用反向替换将 θ 转换为 x 。

$$x + 2 = u = 2\sec\theta$$

$$\sec\theta = \frac{x + 2}{2}, \tan\theta = \sqrt{\left(\frac{x + 2}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x}} = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + C = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4x} + 2}{2}\right) + C$$

示例

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 8x + 1}} = ?$$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

根号下的东西看起来能够凑成平方差：

$$x^2 - 8x + 1 = \underbrace{(x - 4)^2}_{u^2} - \underbrace{(\sqrt{15})^2}_{a^2}$$

$$u = x - 4, \quad du = dx, \quad a = \sqrt{15}$$

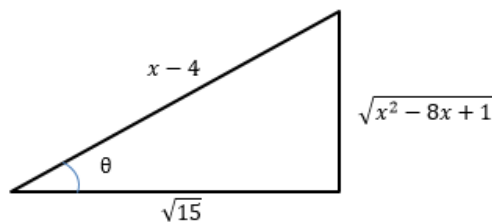
根据套路3进行配方：

$$u = a \sec \theta = \sqrt{15} \sec \theta, \quad du = \sqrt{15} \sec \theta \tan \theta d\theta,$$

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{15} \tan \theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 8x + 1}} = \int \frac{\sqrt{15} \sec \theta \tan \theta d\theta}{\sqrt{15} \tan \theta} = \int \sec \theta d\theta = \ln(\tan \theta + \sec \theta) + C$$

最后根据三角函数的几何意义将 θ 替换回 x ：



$$\ln(\tan \theta + \sec \theta) + C = \ln \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 1} + x - 4}{\sqrt{15}} + C$$

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: 单变量微积分

标签: 配方, 三角替换

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [单变量微积分笔记21——三角替换2（tan和sec）](#)
» 下一篇: [单变量微积分笔记23——部分分式](#)

posted on 2017-11-17 22:38 我是8位的 阅读(1521) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告

yzodcs.com

永中DCS，文档在线预览处理专家

10年行业经验，受到众多政府客户、央企单位、邮箱客户、OA办公系统、招聘网站、教育客户青睐

了解详情

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间: 2022年3月8日-3月18日



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes